



هه‌زاره‌تا به‌وه‌ردی - رێڤه‌به‌ریا گه‌ستی یا پرۆگرام و چاپه‌مه‌نیان

بیرکاری بۆ ھەمووان

پہرتووکا راہینانان
پؤلا دوازدی زانستی

چاپا سیپی

۲۷۱۶ کوردی ۲۰۱۶ زایینی ۱۴۳۷ مشهختی

ههلسهنگاندنا زانستی
الیاس حیدر الیاس

وهرگیران و گونجاندن
شکری حسن سلو
عصام الدین عبید عمر
مشیر الیاس عبدالله

پیداچوونا چاپکرنی
شکری حسن سلو

پیداچوونا زمانی
طه یاسین طه

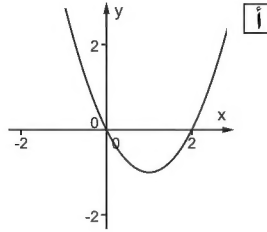
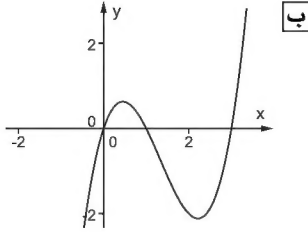
سه‌رپه‌رشتی هونه‌ری پی چاپی
عثمان پیرداود کواز
سعد محمد شریف صالح

۱	ویئہ یئین پروونکرنی و نمونہ یئین هیلی Graphs and Linear Models	بہشی ئیکی
۴	دہروازہ یہک بو ہہ ژمارتنا جیاکاری و تہواوکاری Introduction to Calculus	بہشی دووی
۹	داتاشراو و نمونہ یا لیکہفتی Derivative and the Tangent Problem	بہشی سییی
۱۳	بجہئینانا داتاشراوی Applications of Differentiation	بہشی چواری
۱۸	تہمامکارییا بیسنور Indefinite Integral	بہشی پیئنجی
۲۲	برگہ یئین قوچہکی Conics Sections	بہشی شہ شہم
۲۵	ژمارہ یئین ئاویتہ و ئہندازہ Complex Numbers And Geometry	بہشی حہفتی
۲۷		بہرسف

بۇ قوتابى

پەرتووكا رايۇنلارغا يا ھاتىيە دارىژتن ژ بۇ پەيداكرنا رايۇنلارغا زىدە بۇ قوتابىان ل سەر وان
شارەزايىن ئەود ھەر وانەيەكىدا فېربووين. ئەف پەرتووكە يا پېكھاتى ژ بەرپەرەكى بۇ ھەر
وانەيەكى. و ھەر رايۇنلارغا ل ئەوى بەرپەرى ئەوان شارەزايى و بىھىنلارغا بخۇقە دگرت ئەوين
قوتابى فېربووين ل وى وانەيى.

ئەوی وینەیی پروونکرنی دیارکە کو نهخشهیا راهینانی دنوینت.



1 $f(x) = (x-1)^2 - 1$

2 $f(x) = (x-1)^3 - x^2 + 1$

وینەیی پروونکرنی ب خالان بکیشە.

3 $f(x) = 4 - x^2$

4 $f(x) = |x| - 1$

ئیکو دووبرینین ئاسویی و ستوونی یی نهخشه دیارکە.

5 $f(x) = 2x - \sqrt{x^2 + 1}$

6 $f(x) = \frac{3(2-\sqrt{x})}{x}$

ل راهینانین ۷-۹، دیارکە ئەری ئەو نهخشه کتە یان جووتە، یان چو ژوان نینە؟

7 $f(x) = x^3 - 4x$

8 $f(x) = \frac{\sqrt{4-x}}{x}$

9 $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$

خالین ئیکودوو برینین وینەیین پروونکرنین هەردوو نهخشهیان بهەژمیرە:

10 $g(x) = 1 - x^2$ و $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

11 $g(x) = 6 - x$ و $f(x) = -|2x - 3| + 6$

ويٺهئي وي راسٽه هيلى ڪو لاري وي و ٺهه خالاتيرا دٻوريت ديار ڪرين بڪيٺه.

1 3 : (-2, 1) 2 0 : (3, 5) 3 لاري وي پيٺاسه نه ڪريه : (2, $\frac{5}{4}$)

هاوڪيٺهيا وي راسٽه هيلى بينه دهر ههڪه د ٺهوان ههر دوو خالين ديار ڪري بٻوريت.

4 (1, 2) و (4, 3) 5 (-2, 4) و (-2, -4)

هاوڪيٺهيا ٺهه راسٽه هيلى بينه دهر ههڪه د خالا ديار ڪري رابٻوريت و تهريب بيت دگه راسٽه هيلى ديار ڪري.

6 (1, 2) : $2x - 3y = 1$ 7 (-5, 3) : $x = 1$

هاوڪيٺهيا ٺهه راسٽه هيلى بينه دهر ڪو دخالا ديار ڪريدا بٻوريت و ستوون بيت لسهر راسٽه هيلى ديار ڪري.

8 (-2, 3) : $4x - 5y = 3$ 9 (3, 1) : $y = -2$

دووري لٺا ٺههرا خالا M و راسٽه هيلى d بهه ٺميڙه.

10 $M(4, 5)$: $d : 4x + 3y = 4$ 11 $M(1, 3)$: $d : y = 2x - 1$

12 ڪوٺپانيه ڪي دوو دهر خسته پيشڪيٺي فهرمانبه ره ڪي نوي ڪرن، دا ٺيڪي ٺوان ههلبٻرت. له دهر خسته يا ٺيڪي 6500 ديناران

بهرامبه هر دهر ٺميڙه ڪاري وهر دهر گرت، دگه 500 ديناران بو هر يهڪه يهڪا بهرهه مي. له دهر خسته ي دووي 5100

ديناران بهرامبه هر دهر ٺميڙه ڪاري وهر دهر گرت دگه 700 ديناران بو هر يهڪه يهڪا بهرهه مي.

ا هاوڪيٺهيا هيلي بو هر دهر خسته يهڪي بنقيسه، ڪو ٺمارهيا يهڪه يٺن بهرهه مي x دهر ٺميڙان دا بنويٺ.

ب ههر دوو هاوڪيٺهيا نئيڪ روته ختي پوتانيدا بنويٺه، و پوتانين خالين ٺيڪ دووبرينا ههر دوو ويٺهيا ن بهه ٺميڙه.

ج خالين ٺيڪو دوو برينين ل لقي (ب) چ دنويٺن؟

چهوا ٺهه زانياريا بڪاردٺين، دا فهرمانبه ره دهر خسته يا گونجاي ههلبٻريت؟

نهخشه و وینهییٚن پروونکرینیٚن وان (چهماوهییٚن وان) Functions and Their Graphs

بهایین داخوازکری بۆ نهخشهییٚ بههژمیږه نهگهر یادشیانداوو، نهجامان ب سادهترین شیوه بنقیسه.

1 $h \geq -\frac{1}{2}$ کاتیٚک $f(1+h)$ ، $f(5)$ ، $f\left(\frac{5}{2}\right)$ ، $f(1)$ ، $f(x) = \sqrt{2x-1}$

2 $\frac{f(2+\sqrt{x})-f(2)}{\sqrt{x}}$ ، $f(\sqrt{2})$ ، $f(1)$ ، $f(-1)$ ، $f(x) = x^3 - 2x^2$

3 $f\left(\frac{5\pi}{2}\right)$ ، $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ ، $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ ، $f(0)$ ، $f(x) = \sin 2x$

4 $f(-1)$ ، $f(2)$ ، $f(0)$ ، $f(1)$ ، $f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{x^2+1} & x \geq 1 \\ \frac{3}{x-1} & x < 1 \end{cases}$

بوارو مهوادیٚ همر نهخشهیهکیٚ دیاریکه.

5 $f(x) = \sqrt{x^2-1}$ 6 $f(x) = \frac{2}{|x-1|}$

7 بهاییٚ $(f \circ g)(2)$ بههژمیږه ههکه $f(x) = x^2 + 1$ و $g(x) = \frac{1}{x-3}$

8 چهماوهییٚ نهخشهیا بنهږت $f(x) = |x|$ بکارینه بۆ وینهکیٚشانا همرنهخشهیهکا ل خوارئ.

ا $y = |x| + 1$ ب $y = |x+1|$ ج $y = |2x-4|$

9 سیٚ نهخشیان وهک f ، g ، h بههژمیږه کو $k = f \circ g \circ h$ ب مهرجهکیٚ $k(x) = 2 \sin(3x)$ پیک بینت.

10 دیاریکه ئهريٚ نهخشهیا f جووته یان کته.

ا $f(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1}$ ب $f(x) = x^2 \sin x$ ج $f(x) = x + |x|$

11 ئهوان جهگوهرکان ئیک ل دووٚف ئیک دیاریکه کو چهماوهییٚ نهخشهیا بنهږت $f(x) = x^3$ بۆ چهماوهییٚ همر نهخشهیهکا ل خوارئ دگوهرپیت.

ا $f(x) = (x-1)^3 + 1$ ب $f(x) = 2x^3$ ج $f(x) = 2(x+1)^3$

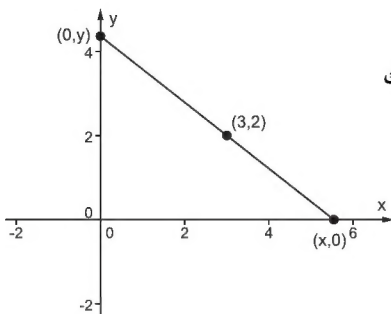
12 وینهییٚ بهرامبهر سیگوٚشهیهکا وهستاو د چاریکیٚ ئیکیٚ دال سهر پرووتهختیٚ پوتانی

دنوینت. کو ژییٚ سیگوٚشهییٚ دخالا (3, 2) رادبوریٚت دریٚیا ژییٚ ئهویٚ سیگوٚشهییٚ وهک نهخشهیهکا پیٚ x بنقیسه.

13 پروونبکه کو نهجامیٚ لیکدانا دوو نهخشهییٚن کت دبیته نهخشهیهکا جووت؟

14 پروونبکه کو نهجامیٚ لیکدانا نهخشهیهکا کت دگهل نهخشهیهکا جووت،

دبیته نهخشهیهکا کت.

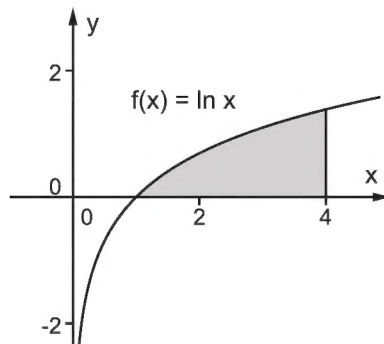


ههردوو راهیانان 1 و 2 دا، اهینانی شیکاریکه ههکه یا دشیانداوو، بیی بکارئینانا چهمکی نارمانجی و شیکارکرنی و بوچوونین خو پروونبکه ههکه ته چهمکی نارمانجی بکارئینا، پاشی پیا ههژمارتنی یان وینهیی پروونکرنی بکارینه بۆ خهملاندنا بهرسفا خو.

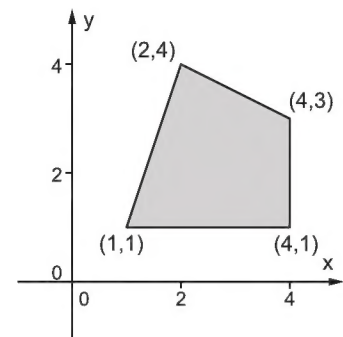
1 ئه دوورییا تهنهکی لڤوک ل دهمی 20 چرکهیان دهرت بههژمیڤه، ههکهر ئه و تهنه ب لهزهکا نهگۆپ بری وی 8m/s بریقهبعیت.

2 خالهک ل سهه چهماوهیی نهخشهیا $f(x) = 0.2x^2 + x$ دلقیت، دهمی x بهرهف پیشقهچونا ئاسویی بۆ وخالی بیت و $f(x)$ بلندبوونی بهرامبهری وی بنوینت. تیکرای گۆهوپنا بلندایا خالی ل $x = 3$ بههژمیڤه.

دهردوو راهیانان 3 و 4 دا، پرووبهیی دهقهرا سیبههرکی بکارئینانا لاکیشهیان بههژمیڤه.



4



3

5 نهخشهیا $f(x) = x^2 - 2x$ و خالا $P(1, -1)$ کو دکهفیه سهه چهماوهیی وی بکارینه.

ا چهماوهیی نهخشهیی و ئهوان بهرین د خالا P و خالین $(x, f(x))$ را بورن بکیشه، ههکه x ئهقان بهایان وهبرگرت 1.2, 1.5, 1.8, 2.

ب لاری هه بهرهکی بههژمیڤه.

ج ئهجامین لقی ب بۆ خهملاندنا لاری لیکهفتی نهخشهیا f له خالا P بکارینه. پاشی بهحسبکه چهوا لاری بهرهی نیزیک دبیت بۆ لاری لیکهفتی.

6 نهخشهیا $f(x) = \sqrt{x}$ و خالا $P(4, 2)$ که دکهفیه سهه چهماوهیی وی نهخشهیی بکارینه.

ا چهماوهیی نهخشهیی و وان بهرین د خالا P و خالا $(x, f(x))$ را دبۆرن بکیشه، ههکه x قان بهایان وهبرگرت 1, 3, 5.

ب لاری هه بهرهکی بههژمیڤه، پاشی بهایی نیزیکی لاری لیکهفتی چهماوهیی نهخشهیی ل خالا P بههژمیڤه.

پاڤيئنان

وانه

2-2

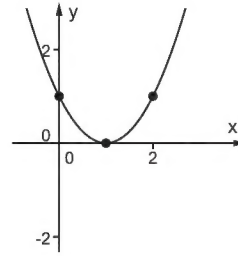
ههژمارتتا ئامارنجان ب ويئهي پوونكرني و بكارئيئانا ژمارهيان

(و ب ژمارهيي) Finding Limits Graphically and Numerically

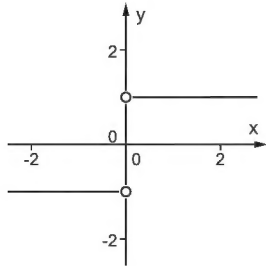
ئارمانجي ب ويئهي پوونكرني (ههكه ههبيت) بههژميڤه، ههكه نهبيت بهلگهيهكي بۆ نهبوونا ئارمانجا وي

بينه

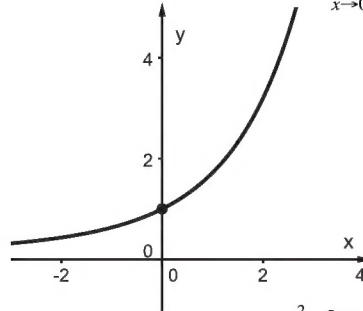
$$\lim_{x \rightarrow 2} (x-1)^2 \quad \text{1}$$



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} \quad \text{2}$$

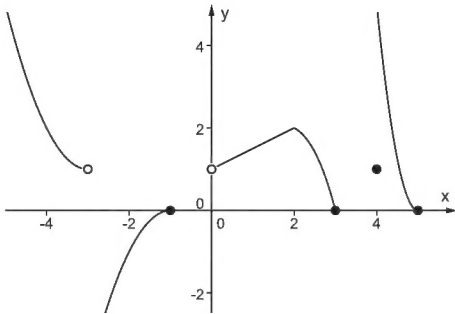


$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases} \quad \text{3}$$



4 بكارئيئانا ژمارهيي ئارمانجا $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3}$ بههژميڤه.

5 ويئهي پوونكرني بكاربينه بۆ بپياردانا ههبوونا بههاييكي، ههكهر ئهه بهايه يي زانراوبيت بهايهكي نيزيك بۆ وي دياربكه، ههكه نا بهلگهيهكي بينه بۆ نهبوونا ئارمانجان.



$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) \quad \text{ب} \quad f(-2) \quad \text{ا}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) \quad \text{د} \quad f(-3) \quad \text{ج}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \quad \text{و} \quad f(2) \quad \text{ه}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) \quad \text{ح} \quad f(4) \quad \text{ز}$$

6 چهماوهيي نهخشهيا f بكاربينه و بهايين c دياربكه، ل دهمي نهبوونا

$$\lim_{x \rightarrow C} f(x)$$

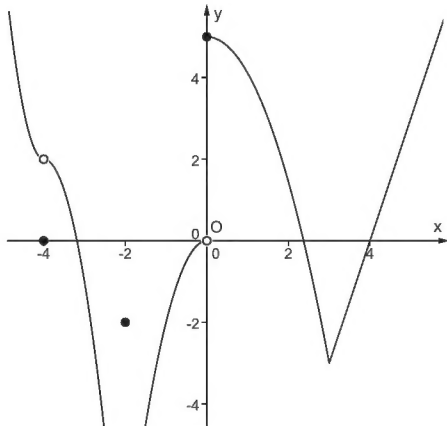
7 چهماوهيي نهخشهيا f بكيشه كو مهرجيئ ل خوارئ ساخبكهت.

$$f(0) \text{ نينه.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 6$$

$$f(2) = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$$



ژ پاهيئنانا 1-7 ، ئارمانجا داخوازكري بههژميڤه:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 3x + 2} \quad 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3} \quad 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} \quad 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin x} - 1}{x} \quad 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x^2} \quad 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{4x} \quad 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x+1| - |x-1|}{x} \quad 7 \text{ بينهدهر.}$$

ل ههردوو پاهيئناني 8 و 9 ، سهلميئراوا دوو مهرج (سهندووچ) بو ههژمارتتا $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ بكاربينه.

$$3 + 2x - x^2 \leq f(x) \leq 3 + 2x + x^2, \quad c = 0 \quad 8$$

$$x - |x - 1| \leq f(x) \leq x + |x - 1|, \quad c = 1 \quad 9$$

10 نهخشهيا f و g دياربكه كو فان ساخدكه: ئەف ههردوو ئارمانج $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ نهبن، لی $[f(x), g(x)]$ ههبن.

11 نهخشهيا $s(t) = -4.9t^2 + 200$ ل بلنداها 200m پشتی t چرکه ژ كهفتنا وی دنويئت.

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{s(t) - s(a)}{t - a} \text{ دبیته لهزا وی بهری ل } t = a \text{ ئارمانجا}$$

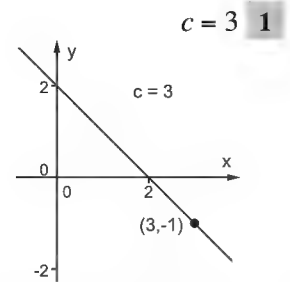
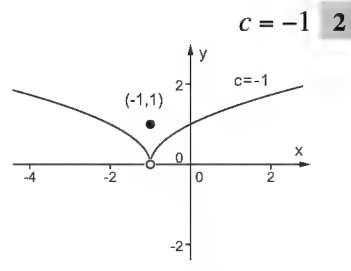
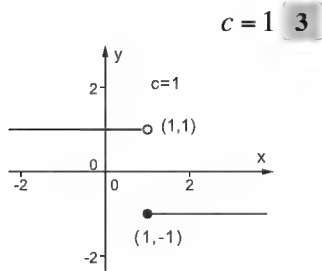
أ لهزا وی بهری ل $t = 2$ بههژميڤه.

ب لهزا وی بهری ل دهمی كهفتنا وی ل ئهردی چهنده؟

12 أ پوونبكه كو $|a| \leq a \leq -|a|$ ههكه ژمارهيا راستی a ههچهندبیت.

ب پوونبكه، ههكه $\lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = 0$ دی $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$

ژ راهیانانا 1 هتا 3 ، وینهیی پروونکرنی بکارینه، بو دیاریکرننا ئارمانجا نه خشهیی ده می x له رهخی راستی و ل رهخی چهیی بو c نیژیکدبیت. $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ (ههکه هه بیت) بهه ژمیړه پاشی بهردهوامیا نه خشهیی ل $x = c$ تاوتوبکه.



ژ راهیانانا 4 هتا 6، بهردهوامیا نه خشهیی تاوتوبکه (دیاریکه).

6 $f(x) = \frac{|x+1|-|x|}{x}$

5 $f(x) = \frac{2x}{x^2-1}$

4 $f(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$

ل هردوو راهیانانین 7 و 8 ، بهایی x (ههکه هه بیت) کو نه خشهيا تیډا یا پچاندی بیت، بینهدر و دیاریکه ههک لادانا وی پچاندنی یا دشیاندابیت.

8 $f(x) = \frac{e^x-2}{x-1}$

7 $f(x) = \frac{\sin 2x}{x}$

9 بهایی a و b دیاریکه کووی نه خشهیی خالا بچاندنی نه بیت.

$$f(x) = \begin{cases} 3 & x \leq 1 \\ ax + 3 & 1 < x \leq 4 \\ bx + 1 & x > 4 \end{cases}$$

10 بوچی ئەفی نه خشهیی رهگ ههیه لنافهرا a و b ؟

$b = 1, a = 0, f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 1$

11 ناخفتنکرن: لیچوونا ناخفتنکرنی لنافهرا ههفلیری و دهرفه ب ئەفی شیوهیی دهیته ههژمارتن: 1040 دینار بو هردوو خولهکین ئیکی، 360 دینار بو هر خولهکهکی یان بهشەکی ژ خولهکا زیده، نه خشهيا $[x]$ بکارینه ب نفیسینا لیچوونا ناخفتنکرنی پی ده می t ب خولهکان. وینهیی پروونکرنی بو ئەفی نه خشهیی بکیشه و تاتویی ل سهر بهردهوامیا وی بکه. $[x]$ رامانا وی ئەوه مهزنتترین ژمارهیا تهواو کو نه زیده تربیت ژ x .

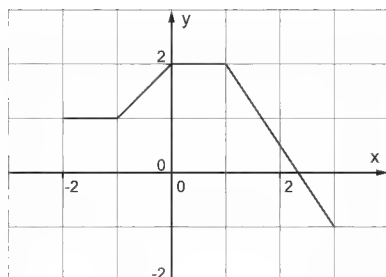
دەركنارىن ستوونى (هەكە هەبن) بۆ چەماوھىي ھەر نەخشەيەكى بەھژمىرە:

3 $f(x) = \frac{x}{\sin x}$

2 $f(x) = \frac{2+x}{x^2(1-x)}$

1 $f(x) = \frac{4}{(x-1)^3}$

ديارىكە ئەرى نەخشەيى دەركنارى ستوونى ھەيە، يان لادانا چاندنى يادشياندايە يان نە. $x = -1$.



4 $f(x) = \frac{x^2 - 6x - 7}{x + 1}$

5 $f(x) = \frac{\sin(x+1)}{x+1}$

6 وئەيى پوونكرنى يى نەخشەيە بەرامبەر f بۆ نقيسنا ھاوكيشەيە نەخشەيە $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ ل ماوھىي $[-2, 3]$ بكارىينە.

لاري نهخشهي ل خالا دياريكري بههژميړه.

3 $(0, 1), f(x) = x^3 + 1$

2 $(1, \frac{2}{3}), f(x) = \frac{2x}{2+x}$

1 $(1, 2), f(x) = x^2 - 2x + 3$

داتاشراوي همر نهخشهيهكي بههژميړه بكارئينانا نارمانجان.

6 $f(x) = \sqrt{2x+3}$

5 $f(x) = \sin x$

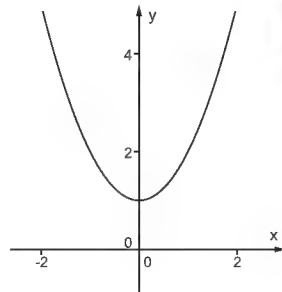
4 $f(x) = x^2 + x$

هاوكيشهيا ليكهفتي چهماوهيي نهخشهي بههژميړه ههكه يي تهريب بيت دگهل راستههيلى هاوكيشهيا وي دياركري.

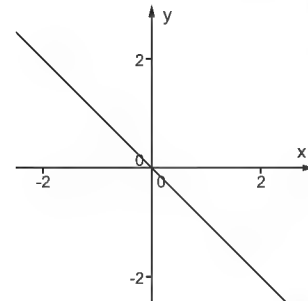
7 $2x - y + 2 = 0, f(x) = x^2 - 2x + 2$

8 $x - 4y + 5 = 0, f(x) = \sqrt{x+1}$

ههكه وينهي پروونكرني بو نهخشهيا f ههبيت. وهكي ل بهرامبر ديار، وينهي بو داتاشراوي نهخشهي بكيشه.



10



9

11 ليكهفتي وينهي پروونكرني نهخشهيا h ل خالا $(3, 1)$ دخالا $(1, 3)$ را دپوريت. $h(3)$, $h'(3)$ بههژميړه.

12 بهايين x بههژميړه كو نهخشهيا $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x & x < 0 \\ 2x + 1 & x \geq 0 \end{cases}$ شيانا داتاشراوي نهبيت.

ل هردوو راهينانين 13 و 14، دياريكه ههكه نهخشهي شيانا داتاشراوي ههبيت ل $x = 1$.

14 $f(x) = \begin{cases} (x-1)^3 & x \leq 1 \\ (x-1)^2 & x > 1 \end{cases}$

13 $f(x) = |x-1|$

داتاشراوى هەر نهخشهيهكى بههژميږه.

$$f(x) = x^2 + xe^x \quad 3$$

$$f(x) = x^2 \sin x \quad 2$$

$$f(x) = x^2 + 4 - \frac{5}{x^2} \quad 1$$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad 6$$

$$f(x) = \sqrt{1 + e^x} \quad 5$$

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^2} \quad 4$$

$$f(x) = \tan \sqrt{x} \quad 8$$

$$f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^3 \quad 7$$

هاوكيشهيا ليكهفتى نهخشهيه ل خالا دياركرى بههژميږه.

$$(3, 6), f(x) = x\sqrt{x+1} \quad 9$$

$$(0, 1), f(x) = x^2 e^x + 1 \quad 10$$

بۆ دياركردنا بهايى $f'(1)$ فان پيدايبان بكارينه.

$$g(1) = 1 \text{ و } g'(1) = -1, h(1) = -2 \text{ و } h'(1) = 3$$

$$f(x) = g(x^2) \times h(x) \quad 12$$

$$f(x) = 3g(x) - 2h(x) \quad 11$$

$$f(x) = h(g(x)) \quad \text{فان بكارينه بۆ دياركردنا } f'(0) : g(0) = 1 \text{ و } g'(0) = -2 \text{ و } h'(1) = 5 \quad 13$$

$$f(x) = x^3 + kx^2 + c \quad \text{ليكهفتى ناسويى ل خالا } (1, 2) \text{ ههبيت.} \quad 14$$

$$[t_0 - 4, t_0 + 4] \quad \text{دبيته لهزا ساتى ل } t = t_0, \quad 15$$

$$s(t) = -\frac{1}{2}at^2 + c \quad \text{ههكه بزاني كو نهخشهيا لاداني دببته}$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{هاوتا } f(x) = ax^2 + bx + c \text{ بههژميږه كو د خالا } (0, 1) \text{ را} \quad 16$$

$$y = x - 1 \quad \text{دببته ليكهفت ل خالا } (1, 0).$$

راهیّنان

وانه

3-3

داتاشراویّ خو به خو و داتاشراویّ بلند

Implicit Defferentiation and Higher Derivative

y' بهه ژمیږه.

$$x^2 + \ln y = e^y \quad 3$$

$$x = y + \sin y \quad 2$$

$$x^3 y + xy^2 = 2 \quad 1$$

y' و لاریّ چه ماوهی ل خالا دیارکری بهه ژمیږه.

$$(-1, 2): xy + x^2 + y^2 = 3 \quad 5$$

$$(1, 1): 2x^2 + 5y^2 = 7 \quad 4$$

داتاشراویّ دووی بو هر نه خشه یه کی بهه ژمیږه.

$$f(x) = e^x + \ln^2 x \quad 7$$

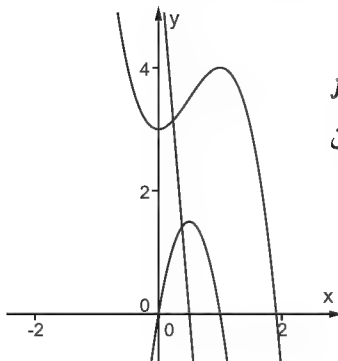
$$f(x) = x + \sqrt{x+1} \quad 6$$

داتاشراویّ داخوازکری بو نه خشه یی بهه ژمیږه کو ئیک ژ داتاشراویّ وی یادیارکریه.

$$f^{(6)}(x), f'''(x) = x^2 + e^x \quad 9$$

$$f^{(4)}(x), f''(x) = x \sin x \quad 8$$

10 وینه یی بهرامبر، چه ماوهی نه خشه یی f' و چه ماوهی نه خشه یی f'' دنوینت، چه ماوهی هر ئیک ژ ئه وان دیاریکه به حسّ چاوانیا دیارکریا هر سی چه ماوهیان بکه.



11 ئارمانجا داخوازکری بهه ژمیږه، پاشی ئارمانجی بکارئینانا سله مینراوا لوبیتال بهه ژمیږه.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{9x^2+1}}{\sqrt{4x^2+1}} \quad \text{ج}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3-27}{x^2-9} \quad \text{ب}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1}-2}{x-1} \quad \text{ا}$$

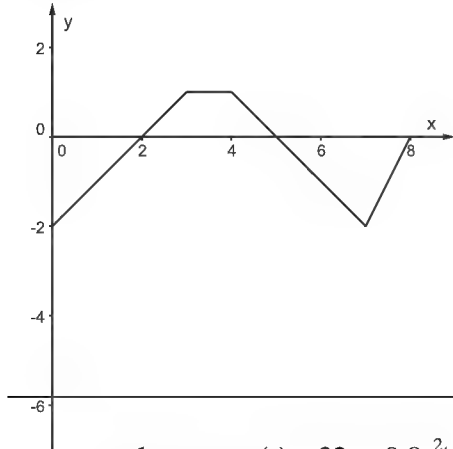
12 خاله کی یان زیده تر دیاریکه کو تیډا لیکه فتیّ چه ماوهی په یوه ندیّ $y^2 - x^2 = 4$ ئاسوی بیت.

13 هه موو خالیّن لسهر بازنا $x^2 + y^2 = 25$ بهه ژمیږه ده می لاریّ لیکه فتی په کسانى $\frac{3}{4}$ بیت.

14 وان خالان بهه ژمیږه کو دواندا لاریّ چه ماوهی هاوکیشه یا $25x^2 + 16y^2 + 200x - 160y + 400 = 0$ ئاسوی بیت.

1 درژیا لاکشیهکی $(3t + 2)$ و پانیا وی $(\sqrt{t+1})$ ، تیکرایي گوهورینا ئه وی لاکشیهی ل دووف گوهورینا t بهژمیره.

2 لووله که کا بازنه یی یاوه ستاو نیقتیره یی بنکه یی وی $(\sqrt{t+2})$ و بلندایا وی $(\sqrt{2t+1})$. تیکرایي گوهورینا قه باره یی وی لووله کی ل دووف گوهورینا t بهژمیره.



3 وینه یی بهرامبر چهماوه یی نهخشه یا $v = f(t)$ دنوینت، کو لهزا ئاراسته کری بو خاله کا تهوهری x دنوینت.

ا) کهنگی ئه و خاله بهره ف پاش دلقت؟ بهره ف پیش دلقت؟ کهنگی

لهزا وی زیده دبیت؟ وکهنگی کیم دبیت؟

ب) کهنگی تاودانا خاله کی موجه ب یان سالب یان سفر دبیت؟

ج) کهنگی خال ب پهره لهز خو بریقه دچیت؟

د) کهنگی ئه و خاله ژلقینی رادوستیت؟

4 بهره ک ل سهر پرووی ههقی بهره ف سهری ههلا ب لهزا بهره ف 32 m/s نهخشه یا $s(t) = 32t - 0.8t^2$ نمونه یه که بو هژمارتنا بلندایا وی بهری پشتی t چرکه.

ا) لهزا وی بهری وه نهخشه یه کی پی ده می t بهژمیره، ههروسا تاودانا وی بهری پی ده می t بهژمیره.

ب) پشتی چند چرکه یان ئه و بهره دگه هته بلندترین بلندای (پهره بلندای)؟

ج) بلندترین بلندایا ئه و بهره دگه هتی چنده؟

د) کهنگی ئه و بهره دگه هته بلندایا نیقا بلندترین بلندای؟

ه) چند چرکان ئه و بهره ل ئاسمانی دهمینیت؟

ل ههردوو راهینانین 5 و 6 دا، وهسا دانه x و y دوو نهخشه نه پی t و شیانانا داتاشراوی هه نه، داخوایی ل دووف پیدایان بهژمیره.

په یوهندی لناقهره x و y	داخوایی	پیدایی
$xy = 4$	له $x = 8$ $\frac{dy}{dt}$	$\frac{dx}{dt} = 10$
	له $x = 1$ $\frac{dx}{dt}$	$\frac{dy}{dt} = -6$
$2x^2 + 3y^2 = 5$	له $x = 1$ $\frac{dy}{dt}$	$\frac{dx}{dt} = -2$
	له $y = 1$	

7 نیقتیره یی بازنه یه کی 3 cm/s زیده دبیت.

ا) تیکرایي چیه یی بازنه ی بهژمیره ده می $r = 9 \text{ cm}$.

ب) تیکرایي گوهورینا پروبه ری بازنی بهژمیره ده می $r = 6 \text{ cm}$.

8 تیکرایي گوهورینا دوری لناقهره خاله کی ل سهر چهماوه یی نهخشه یا $y = x + \cos^2 x$ دلقت و خالا بهره ف

بهژمیره هه که بزانی کو $\frac{dx}{dt} = 2 \text{ cm/s}$.

راهيئنان

وانه

1-4

First Derivative Test

تاقيرنا داتاشراوى ئيكي

ل رايئنانا 1 هتا 4، ماوهيئن بهرهف زيدهبووني و بهرهف كيئبووني دياركه.

$$f(x) = x^3 - 12x + 1 \quad 2$$

$$f(x) = 4x + \frac{1}{x} \quad 1$$

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad 4$$

$$f(x) = xe^x \quad 3$$

ژ رايئنانا 5 هتا 8، فان بههژميژه: (أ) بهايئن شلوقة (ب) ماوهيئن بهرهف زيدهبوون و كيئبووني (ج) تاقيرنا داتاشراوى ئيكي بكاربينه بو ههژمارتنا بهايئن پهړ خوچهي (د) چهماوهيي نهخشهيي بو ساخكرنا دروستيا بهرسقا خو بكيشه.

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1 \quad 6$$

$$f(x) = x^2 + 4x \quad 5$$

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4} \quad 8$$

$$f(x) = -4x + \frac{4}{x} \quad 7$$

ژ رايئنانا 9 هتا 12، نهوان داخوازيئن پرسيارين پيشتەر ل ماوهيي $[0, 2\pi]$ بجهبينه.

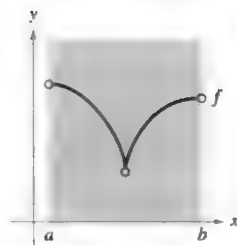
$$f(x) = \sin 2x \quad 10$$

$$f(x) = \frac{x}{2} - \sin x \quad 9$$

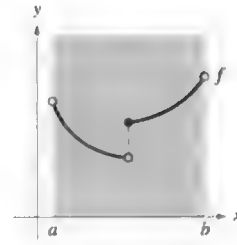
$$f(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} \quad 12$$

$$f(x) = x^2 + \cos x \quad 11$$

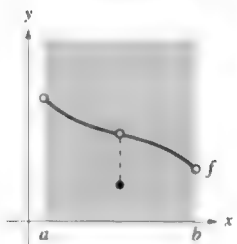
ژ رايئنانا 13 هتا 16، دياركه ئهري نهخشهيي بهايي بچووكترين خوچهي ل ماوهيي $[a, b]$ ههيه ل دووڤ چهماوهيي ل نهوي ماوهيي.



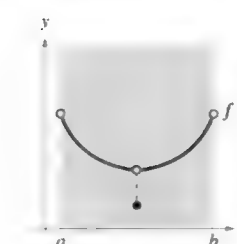
14



13

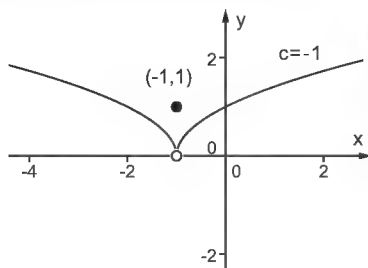


16

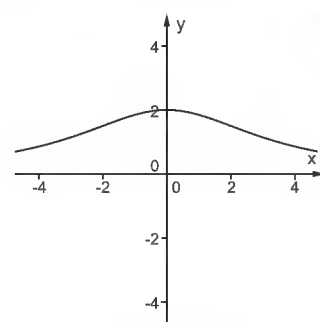


15

ل راهینانا 1 و 2 ، ماوهینن فکری بهه ژمیرده ده می چه ماوهی نه خشه یی کومد بیت یان ناچال بیت.



2



1

ژ راهینانا 3 هتا 6، خالین ودرگه پانی دیاریکه (هه که هه بن)، ده فیرین کومد و ناچال ب وینه یی پروونکړنی نه خشه یی بهه ژمیرده.

$$f(x) = x\sqrt{x+1} \quad 4$$

$$f(x) = 2x^4 - 8x + 3 \quad 3$$

$$f(x) = xe^x \quad 6$$

$$\text{له ماوهی } [0, 2\pi]$$

$$f(x) = x - \cos x \quad 5$$

ژ راهینانا 7 هتا 10، پهره بهایی دوماهیا خوجهی (مه زترین و بچو وکترین) بهه ژمیرده بکارینانا داتاشراوی دووی هه که یادشياندا بیت.

$$f(x) = -\frac{1}{8}(x+2)^2(x-4)^2 \quad 8$$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3 \quad 7$$

$$f(x) = 2\sin x + \cos 2x \quad 10 \quad \text{له ماوهی } [0, 2\pi]$$

$$f(x) = x \ln x \quad 9$$

ل راهینانا 11 و 12، وینه یی پروونکړنی بؤ نه خشه یی بکیشه کو مه رجین دیارکړین ساخدکته

$$f(0) = f(2) = 0 \quad 12$$

$$f(0) = f(2) = 0 \quad 11$$

$$f'(x) < 0 \quad \text{له ماوهی } x < 1$$

$$f'(x) > 0 \quad \text{له ماوهی } x < 1$$

$$f'(1) = 0$$

$$f'(1) = 0$$

$$f'(x) > 0 \quad \text{له ماوهی } x > 1$$

$$f'(x) < 0 \quad \text{له ماوهی } x > 1$$

$$f''(x) > 0$$

$$f''(x) < 0$$

13 نه خشه یی $C(x) = 2x + \frac{320000}{x}$ نمونه یه که بؤ هه ژمارتنا لیچوویا کړین و داگرتنا x یه که یان ژ بهرهمه کی دیارکړی. چه ند یه که یان ژ x دقیت بکرت و داگرت بهمه رجه کی کیتمترین لیچوون هه بیت.

14 نه خشه یی $S = \frac{100t^2}{65+t^2}$ کو $t > 0$ نمونه یه کی دنوینت بؤ دیارکړنا لهزا چا که ره کی لسه رنایمیری چاپی (ب ژمارا په یقان د خوله که کیذا) به پیی ژماره ی هه فته کان t پاش راهینانکړنی.

ب نری لهزا چاپکری بهر دهوام زیده دبیت ده می بهایی t زیده بیت؟ پروونکه.

ا نیشانانا داتاشراوی ئیکی چیه ده می t یی موجه ب بیت؟

راهیٔنان

وانه

3-4

Limits at infinity

ئارمانج ل بیدوماهیٔ

ژ راهیٔنانا 1 مهتا 6، ئارمانجا داخوازکری بههژمیٔره.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 5} \quad 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+4}} \quad 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+1}{2x-3} \quad 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos \frac{1}{x}}{x+1} \quad 6$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin 5x}{x} \quad 5$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3x+2 \cos x} \quad 4$$

ژ راهیٔنانا 7 مهتا 12، ویتنهیی پوونکرئی بو نهخشهیهیی بکیشه بکارئینانا پهٔره بهایی دوماهیا خوَجھی و ئیکو دوو برینان دگهل ههردوو تهوهرین پؤتانان و هاوجیٔوون و دهٔرکناران،

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2-16} \quad 9$$

$$f(x) = \frac{x}{x^2-1} \quad 8$$

$$f(x) = \frac{3+x}{2-x} \quad 7$$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} \quad 12$$

$$f(x) = 4x + \frac{1}{x} \quad 11$$

$$f(x) = 1 - \frac{4}{x^2} \quad 10$$

13. راستههیلکه لاری وی m بیٔ و د خالا $(-2, 0)$ را دبۆریت.

ا) پی m دووری $d(m)$ لناقبهرا $(2, 4)$ و ئهوی راستههیلی بههژمیٔره.

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} d(m)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} d(m)$ بههژمیٔره.

راهيئنان

وانه

4-4

ويئنه كيئشانا ويئنه يي پوونكرني (چه ماوه) بو نه خشه يي Curve Sketching

ژ راهيئنانا 1 ههتا 6، ويئنه يي پوونكرني بو نه خشه يي ويئنه بكه.

$$f(x) = (x-1)^5 \quad 3$$

$$f(x) = \frac{2x}{x^2-1} \quad 2$$

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1} \quad 1$$

$$f(x) = x^5 - 5x \quad 6$$

$$f(x) = |2x-5| \quad 5$$

$$f(x) = x\sqrt{16-x^2} \quad 4$$

ژ راهيئنانا 7 ههتا 9، ويئنه يي پوونكرني بو نه خشه يي ويئنه بكه.

$$f(x) = 2\sin x + \sin 2x \quad 7 \quad \text{له ماوه } [0, 2\pi]$$

$$f(x) = 2x - \tan x \quad 8 \quad \text{له ماوه } \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$$

$$f(x) = \frac{x}{\tan x} \quad 9 \quad \text{له ماوه } \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

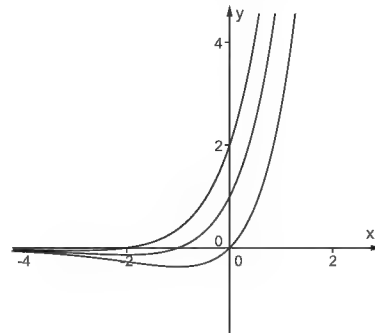
ژ راهيئنانا 10 ههتا 12، نه خشه يه كي دياربكه، كو مه رجين پرسيارى ساخبكهت.

10 نه خشه يه كه دهركنارى ستوونى $x=1$ و دهركنارى ئاسويى $y=3$ ههيه.

11 نه خشه يه كه دهركنارى ستوونى $x=-2$ و دهركنارى لارى $y=-x+1$ ههيه.

12 نه خشه يه كه دهركنارى ستوونى $x=1$ و دهركنارى لارى $y=2x+3$ ههيه.

13 لسهر ئيك روته ختي پوتانى ويئنه يي پوونكرني بو نه خشه يه f و داتاشراوى ويئنه يي ئيكى f' و داتاشراوى دووى f'' دياردكهت. ويئنه يي پوونكرني بو f و f' و f'' جودابكه.



$$f(x) = \frac{1}{2}(ax)^2 - ax \quad 14 \quad \text{كو } a \neq 0$$

1 ا لسهر ئيك روته ختي پوتانى ويئنه يي روونكرني بو چوار بهايين جياوازين a بكيشه.

ب دياربكه، ئهري گوهورينا بهاي a ، ئيكو دوو برينين ويئنه يي پوونكرني و په ره بهايى ناچچالى نه خشه يي يان كومدى نه خشه يي د گوهوريت. راهيئنان

پاهيټنان

وانه

5-4

Optimization

گهريان ل دووڦ پهري بهايان(مهنترين و بچووکترين بهايان)

- 1 دوو ژماره يان دياربکه، کو سهرجه می وان 120 بیت و نه نجامی ليکدانا وان مهنترين بیت.
- 2 دوو ژماره يي موجهب بهه ژميړه، کو ئیک ژوان هه لگه پراوی یی دی بیت و سهرجه می وان بچووکترين بیت.
- 3 دوو ژماره يي موجهب بهه ژميړه، کوسهرجه می دوجايي هه ردوان دبیته 72، و نه نجامی ليکدانا وان مهنترين بیت.
- 4 دريژي و پانيا لاکيشه يه کی بهه ژميړه کو پووبه ری و می مهنترين بیت، هه که بزانی چيوه یی و می 120m.
- ل هه ردو و پاهيټنانين 5 و 6، خاله کی ل سهر چه ماوه یی نه خشه یی دياربکه کو نيژيکترين خال بیت بو خالا ديارکری.

$$5 \quad f(x) = x^2; \left(2, \frac{1}{2}\right) \quad 6 \quad f(x) = \sqrt{x+8}; (2, 0)$$

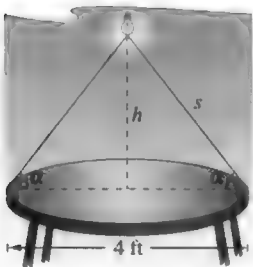
- 7 بچووکترين پووبه ر: سهرجه می چيوه یی سيگوشه يه کا پیک (لايه کسان) و چوارگوشه يه کی 10m، دريژيا هه ريک ژ لایي سيگوشه یی و لایي چوارگوشه یی بهه ژميړه کو سهرجه می هه ردو و پووبه ری وان بچووکترين بیت.

- 8 مهنترين پووبه ر: دريژي و پانيا مهنترين لاکيشه يه کی بهه ژميړه، کو د ناف نيڦ بازنيډا بيته وينه کړن، هه که نيڦ تيره یی بازنی r بیت.

- 9 تيله کا کانزایی دريژيا و می 30 m و دقین دوو شيوه يان پی و می تيلي دروستبکه ن، دقیت چهند ژ و می تيلي بو هه ر شيوه يه کی بيته بکارئينان؟ هه که بزانی کو پووبه ری گشتی یی و می تيلي دهو رودایی مهنترين بیت، فان بارين ل خوارى روونبکه هه که هه ردو و شيوه.

ا سيگوشه يه کا پیک و چوارگوشه يه ک يت.

ب چوارگوشه و بازنه بن.



- 10 پووناهايا، گلوپه کی دکه فته سهر ميژه يه کی بازنه یی کو نيقتيره یی و می 4 پايه. تيشکی I کو ژ روټاهايه کی دهر دکه فته ب ياسايا $I = \frac{k \sin \alpha}{s^2}$ ده يته هژمارتن کو k بهايه کی نه گوره و s دريژيا تيشکيه ژ ريډه ری روټاهايه هه تا لايه کی ميژه یی، و α هه گوشه يه کو تيشک ل گهل ناستی ميژه یی پيکدئينت. بهای h بهه ژميړه کو و هسا هه تيشکه مهنترين بیت.

ل راهینانین 1 و 2 ، دروستیا تمامکاریی ساخبکه بکارئینانا داتاشراوی.

$$\int \frac{x dx}{(1+x^2)^2} = -\frac{1}{2(x^2+1)} + c \quad 1$$

$$\int x \cos x \, dx = x \sin x + \cos x + c \quad 2$$

3 نهخشهیا $f(x)$ بههژمییره ههکه بزانی کو $f'(x) = 2 - 3x^2$ و چهماوی نهخشهیا f د خالا $(-1, 3)$ را دبوریت.

ژ راهینانا 4 ههتا 10، تهمامکاریا بیسنور بههژمییره:

$$\int (2x^3 - 3 \sin x) dx \quad 4$$

$$\int (2\sqrt{x} - 1)^2 dx \quad 5$$

$$\int \frac{2-3\cos x}{4} dx \quad 6$$

$$\int \frac{dx}{3x\sqrt{x}} \quad 7$$

$$\int \frac{4x^4 - 1}{x^2} dx \quad 8$$

$$\int (x-2)(x+2)(x^2+4) dx \quad 9$$

$$\int \frac{(2x-1)^2}{2\sqrt{x}} dx \quad 10$$

11 وینهیی بهرامبر چهماوی داتاشراوی نهخشهیی $f(x)$ دیاردکته،

ئوی وینهیی بکارینه بو بهرسفدانا. قان پرسیارین ل خورای

ههکه $f(1) = 0$.

ا لاری نهخشهیا f له خالی $x = 0$ بههژمییره.

ب هاوکیشهیا لیکهفتی چهماوی نهخشهیا f له $x = 1$ بههژمییره.

ج بهراوردیی بکه لناقبره $f(0)$ و $f(1)$ و $f(2)$.

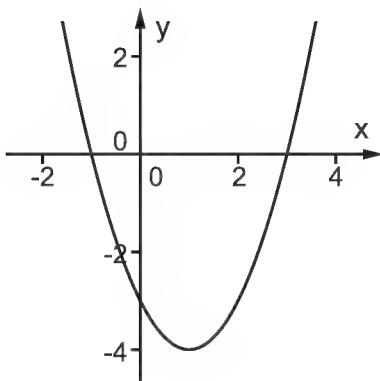
د ههکه $f'(x) = x^2 - 2x - 3$ هاوکیشهیا f' بیت، $f(x)$ پی x

بههژمییره.

12 ترومبیللهك ب تاودانهكا نهگۆر بری وی 3 m/s^2 بریکهفت بو برینا دوورییا 150m.

ا بو برینا ئوی دووریی ترومبیلی چهند دهم دقت؟

ب لهزا وی ل دهمی گهشتنی دبیته چهند؟



ژ پرايئنانا 1 هتا 4، تمامکارییا سنووردار بههژمیره.

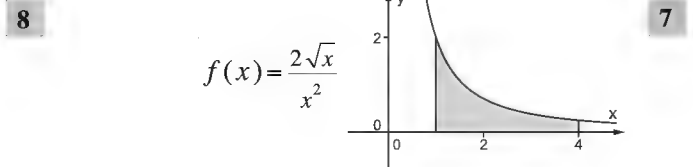
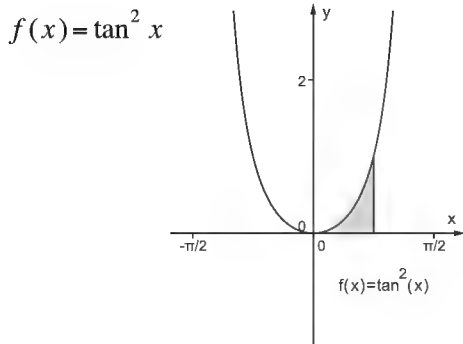
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x + 3\cos x) dx \quad 2 \quad \int_0^1 (x-2)(x+1) dx \quad 1$$

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} (1 + |\sin x|) dx \quad 4 \quad \int_1^4 \frac{(1+\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}} dx \quad 3$$

ل هەردوو پرايئنانین 5 و 6، وینەیی وی دەقەرئ دیاریکە کو پرووبەرئ وی دبیتە تمامکارییا سنووردار، پاشی بهایی ئەوی تمامکارییا بههژمیره بکارئینانا یاسایین هەژمارتەنا رووبەری ل ئەندازەیی.

$$\int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx \quad 6 \quad \int_{-2}^2 (1+|x|) dx \quad 5$$

ل هەردوو پرايئنانین 7 و 8، دەقەرا سیبەرکری بههژمیره.



9 هەکە $\int_1^5 f(x) dx = 3$ و $\int_1^3 f(x) dx = 5$ بهایین ئەقین ل خوارئ بههژمیره.

$$\int_3^5 (x + 2f(x)) dx \quad \text{ب} \quad \int_1^3 \frac{x^2 f(x) - 1}{x^2} dx \quad \text{ا}$$

10 پرووبەرئ دەقەرا سنوورداریی ب چەماوویی نەخشەیا $f(x) = \frac{1}{x^2} + 2\sqrt{x}$ و تەوەرئ x و هەردوو پراستەهیلین $x=1$ و $x=4$ بههژمیره.

11 بهایی نافەند بۆ نەخشەیا $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ ل ماوویی $[1, 4]$ بههژمیره.

12 نەخشەیا $M(x) = 3x^2 - 36x + 105$ لچوويا پەراوێزی ب هزاران دیناران بۆ بەرهەمئینانا x یەکیان بۆ بەرهەمەکی دنوونت $(0 \leq x \leq 8)$.

ا ئەوی نەخشەیی بههژمیره کو لچوويا گشتی $C(x)$ دنوونت، هەکە بزانی کو لچوويا نەگۆر دبیتە 56000 دینار.

ب لچوويا گشتی بۆ بەرهەمئینانا 6 یەکیان بههژمیره

ژ راهینانا 1 ههتا 4، ته مامكاریا داخوازكری بههژمیره.

$$\int_0^{\pi} x \sin\left(\frac{x}{2}\right) dx \quad 2 \quad \int_0^{\ln 2} x e^{-x} dx \quad 1$$

$$\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx \quad 4 \quad \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{3e}{2}} \ln\left(\frac{2x}{3}\right) dx \quad 3$$

5 [أ] بۆ ههژمارتنا $\int \ln x dx$ ته مامكاریا پرتپرتكرنی (بهشبه شكرنی) بكارینه.

[ب] نهخشهیا بنهپهت بۆ نهخشهیا $f(x) = \ln^2 x$ بینهدهر ههكه چهماوهیی وی د خالا (1, 1) را دببۆریت.

6 ته مامكاریا $\int x \sqrt{x+3} dx$ بههژمیره بكارینانا:

[أ] ل جهی $u = x+3$ دانه.

[ب] تهواوكاریی ب پرتپرتكرنی دگهل $dv = \sqrt{x+3}$

ل ههردوو راهینانین 7 و 8، بكارینانا ته مامكاریا ب پرتپرتكرنی زیدهتر ژ جارەکی ته مامكاریا داخوازكری بههژمیره.

$$\int \frac{x^2}{e^x} dx \quad 7$$

$$\int e^{-x} \cos 2x dx \quad 8$$

ل ههردوو راهینانین 9 و 10، پروبهی سنووردراپی ب چهماوهیی $f(x)$ و تهوهی x و ههردوو راستههیلین $x=a$ و $x=b$ بههژمیره.

$$b=1, a=0, f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}} \quad 9$$

$$b=\ln 2, a=0, f(x) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} \quad 10$$

11 ته مامكاریا $\int e^{\sqrt{x}} dx$ بینهدهر.

$$I_0 = \int_0^1 e^{1-x} dx \quad I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx \quad 12 \quad \text{دهمی } n \text{ ژمارهیهكا راستی نه یاسالب بیت.}$$

[أ] I_n بههژمیره ههكه $n=0$ و $n=1$.

[ب] ته مامكاریی ب پرتپرتكرنی بكارینه بۆ سهلماندن $I_{n+1} = (n+1)I_n - 1$.

[ج] بهایی I_3 دههژمهجام بکه.

راهینان

وانه

4-5

Applications of Integral

بجهینانین تهمامکاری

ژ راهینانا 1 هتا 4، پووهری وی دهقهری بههژمیره کو ب نهخشهیا $f(x)$ و تهوهری x و هردوو راستههیلین و $x=a$ و $x=b$ سنووردایه.

$$b = \frac{\pi}{2}, a = 0, f(x) = x \cos 2x \quad 3$$

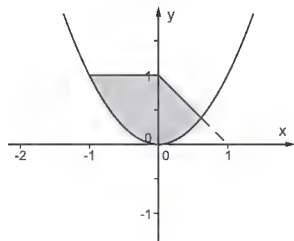
$$b = 3, a = 0, f(x) = x^3 - 3x^2 \quad 1$$

$$b = \ln 2, a = -\ln 2, f(x) = e^x - e^{-x} \quad 4$$

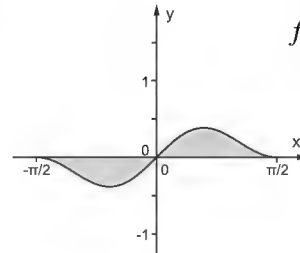
$$b = e, a = \frac{1}{e}, f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad 2$$

5 تهمامکاری بکارینه بو ههژمارتنا پووهری بازنهکی، ههکه چقی وی $(0, 0)$ بیت و دخالا $(4, 3)$ را ببوریت.

ل هردوو راهینانا 6 و 7، پووهری دهقهر سیبهرکری بههژمیره.



$$f(x) = x^2 \quad 7$$



$$f(x) = \sin x \cos^2 x \quad 6$$

$$f(x) = \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} \quad 8$$

ا تهواکاری ب پرتپرتکرنی بکارینه بو ههژمارکرتنا پووهری دهقهر سنووردای ب چهماوهیی نهخشهیا $f(x)$ و تهوهری x و هردوو راستههیلان $x=1$ و $x=e$.

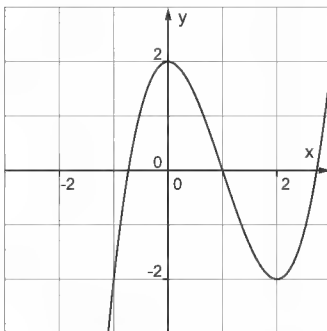
ب قهباری تهوی تهنی پیدادبیت ژ نهجامی دهوردانا دهقهر سنووردایی ل (لقی أ) ل دور تهوهری x بههژمیره.

ل راهینانین 9 و 10، قهباری وی تهنی پیدادبیت ژ نهجامی دهوردانا دهقهر سنووردایی ب چهماوهیی ل دور تهوهری x بههژمیره.

$$x = 2, y = 1, f(x) = \sqrt{x^2 + 1} \quad 10$$

$$x = \ln 2, y = 0, f(x) = e^{2x} - e^{-x} \quad 9$$

ل راهینانین 11 و 12، خالین ئیکو دوو برینین هردوو نهخشهیان بههژمیره، پاشی وی پووهری ب وان سنووردایی بههژمیره.



$$g(x) = x - 1, f(x) = xe^{-x} - e^{-x} \quad 11$$

$$g(x) = x^2, f(x) = x^4 - 2x^2 \quad 12$$

13 وینهیی بهرامهر چهماوهیی نهخشهیا بنهپرت $f(x)$ دیاردکته.

$$\int_{-1}^3 f(x) dx \quad \text{ب بههژمیره.}$$

ب ئهری نهخشهیا $f(x)$ ل ماوهیی $[2, 3]$ یا موجهبه یان سالبه؟

ج پووهری دهقهر سنووردایی ب چهماوهیی نهخشهیا $f(x)$ ، و تهوهری x و هردوو راستههیلان $x=0$ و $x=3$ بههژمیره.

راھینان

وانە

1-6

Conic Sections

برگەییڭ قووچەکی

ل ھەردوو راھینان 1 و 2، تیشکو و سەر و دەلیل و تەوہری برگەیی ھاوتا بینەدەر، پاشی وینەیی برگەیی ھاوتا ڤووتەختی پۆتانیدا بکیشە.

$$x^2 + 6x - 8y + 9 = 0 \quad 2$$

$$x = -2y^2 \quad 1$$

ل ھەردوو راھینان 3 و 4، ھاوکیشەیا برگەیی ھاوتا بەھەژمیرە.

$$x = -6 \quad 4 \quad \text{سەر } (-3, 1), \text{ دەلیل } x = -6$$

$$(0, -1), \text{ تیشکو } (0, -2)$$

ل ھەردوو راھینان 5 و 6 چەق و ھەردوو تیشکو و تەوہری مەزن و بچووک بۆ برگەیی نەتەم بەھەژمیرە، پاشی وینەیی برگەیی بەھەژمیرە.

$$9x^2 + 4y^2 - 18x + 8y - 23 = 0 \quad 6$$

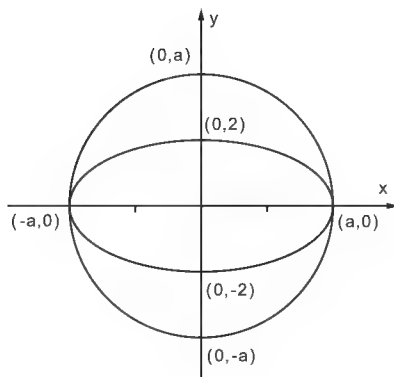
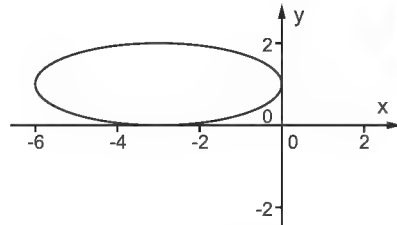
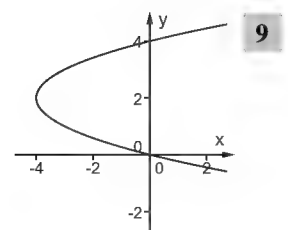
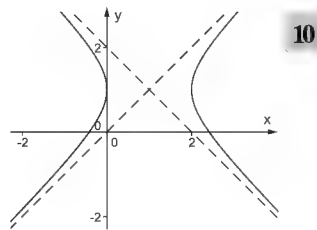
$$x^2 + 9y^2 = 1 \quad 5$$

ل راھینان 8 و 7 چەق و ھەردوو تیشکو و تەوہری مەزن و تەوہری بچووک بۆ برگەیی زیدە بەھەژمیرە، پاشی وینەیی برگەیی بەھەژمیرە.

$$y^2 - 4x^2 + 2y - 8x - 7 = 0 \quad 8$$

$$4x^2 - \frac{y^2}{4} = 1 \quad 7$$

ل ھەردوو راھینان 9 و 11، ھاوکیشەیا برگەیی قووچەکی بەھەژمیرە.



12 ھاوکیشەیا برگەیی نەتەم ئەوی ل وینەیی بەرامبەر دیار بەھەژمیرە، ھەکە بزانی کو ڤووبەری وی دبیتە نیف ڤووبەری بازنەیا ل وینەیی دیاربوووی.

13 د ڤووتەختی پۆتانیدا، چەماوہیی ھاوکیشەیا $x^2 + 4y|y| - 16 = 0$ بکیشە.

14 ھاوکیشەیا وی برگەیی زیدە بەھەژمیرە کو سەرین وی دبەن $(-1, 0)$ و $(1, 0)$ و دەرکنارین وی دبەن $y = -3x$ و $y = 3x$

15 ھاوکیشەیا وی برگەیی زیدە بەھەژمیرە ھەکە چەقی وی $(0, 0)$ بیت و خالەکا سەرین وی $(0, 2)$ بیت و تیشکوہکی وی خالا $(0, 4)$ بیت.

- 1 جياواڙيا چهقي بڻ برگهي نه تمام $4x^2 + 3y^2 = 12$ ل گهل هردوو تيشڪويان و هردوو دهليان بههٺمير.
- 2 هاوڪيشيا برگهيٺ نه تمام بههٺمير ههڪه چهقي وي $(2, 1)$ و تيشڪويهڪاڪي وي $(4, 1)$ و دهليوي $x = 6$ بن
- 3 هاوڪيشيا برگهيٺ نه تمام بههٺمير ههڪه چهقي وي $(0, 0)$ و تيشڪويهڪاڪي وي $(2, 0)$ و سرهڪي وي $(3, 0)$ بن.
- 4 پوتانين سرين برگهيٺ نه تمام بههٺمير، ههڪه جياواڙيا چهقي $\frac{2}{3}$ بو هردوو تيشڪويين وي $(0, \pm 3)$ بن.
- 5 جياواڙيا چهقي بڻ برگهيٺ زيده $x^2 - 9y^2 + 1 = 0$ دگل هردوو تيشڪويان و بهلگههڪي وي بههٺمير.
- ل دهردوو راهيٺانين 6 و 7 دا، هاوڪيشيا برگهيٺ زيده بههٺمير ب زانينا پيڪهاتين ديارڪري.
- 6 جياواڙي چهقي: 2، هردوو سر $(\pm 2, 0)$
- 7 جياواڙيا چهقي: 3، هردوو تيشڪو $(0, 0)$ $(0, 4)$
- 8 جياواڙيا چهقي بڻ برگهيٺ زيده $x^2 - y^2 = a^2$ کو $(a \neq 0)$ بههٺمير، هردوو تيشڪويان و دهلي و دهرکناران بههٺمير.
- 9 جياواڙيا چهقي بڻ برگهيٺ زيده بههٺمير ههڪه هردوو سر $(\pm 2, 0)$ بن و دخالا $(3, \frac{5}{2})$ راببوريت.
- 10 جياواڙيا چهقي بڻ برگهيٺ نه تمام بههٺمير کوڙ کومهلا هموو وان خالان پيڪدهيت دروتهختيدا، کو سرجهمي هردوو دوورين ههڪه خالهڪي ڙ هردوو خالا $(1, 0)$ $(4, 0)$ بهايهڪي نهگوره و دبته 6.
- 11 جياواڙيا چهقي بڻ خولگهيٺ ههسارا ميريخ دبته 0.09 بنيزيڪي. ريڙا دريڙيا وي خولگهيٺ بڻ پانينا وي بههٺمير.
- 12 روونبڪه کو هاوڪيشيا برگهيٺ نه تمام ل سر نهقي شيوهيٺ دهيت نهفيسين:
- 13 راهيٺانا پيشتر بڪارينه دا روونبڪه کو ئارمانجا برگهيٺ نه تمام دبته بازنه، دهمي e نيزيڪ دبته بڻ 0.

راهیـنان

وانه

3-6

Quadratic Equations in 2 Variables هاوکیشهیین دوو جای ب دوو گۆراون

ژ راهیـنانا 1 هتا 4، تاقیکرنا جۆداکهری بکارینه بو دیارکرن جۆری وی چهماوهیی کو هاوکیشه یی دنویئت.

$$4x^2 + y^2 - 4xy - 4x - 10 = 0 \quad 2$$

$$x^2 + xy + y^2 + x + y + 1 = 0 \quad 1$$

$$x^2 - 3xy - 4y^2 = 0 \quad 4$$

$$x^2 - 4xy + 4y^2 + 4 - 3 = 0 \quad 3$$

ژ راهیـنانا 5 هتا 8، هردوو تهوهرین پۆتانی دهوهره دا ژ رادهیی ئیکودوو برینی رزگاربت، پاشی جۆری نواندا چهماوهیی وی هاوکیشهیی دیاربکه.

$$x^2 + 2\sqrt{3}xy - y^2 + 4 = 0 \quad 6$$

$$2x^2 + xy + 2y^2 - 15 = 0 \quad 5$$

$$xy + y + 1 = x \quad 8$$

$$x^2 - 3xy + y^2 = 5 \quad 7$$

9 ساین و کۆساینا ئهوی گۆشیا هردوو تهوهرین پۆتانی پی هاتینه دهوهران بههژمیره دا ژ رادیی ئیکودوو برینا هاوکیشهیا $4x^2 - 4xy + y^2 - 8\sqrt{5}x - 16\sqrt{5}y = 0$ رزگاربت (بیی بکارئینانا دهوهرانی).

10 کارتیکرنا دهوهرانا هردوو تهوهرین پۆتانی ب 90° ل دۆر خالا بنهپهت ل هاوکیشهیا هه برپگهیهکی قووچهکی چییه؟ هاوکیشهیا ئهوی برپگهیی قۆچهکی ل رووتهختی پۆتان یی نوی بههژمیره.

$$\boxed{a} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1: \text{برپگهیی نه تمام}$$

$$\boxed{b} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1: \text{برپگهیی زیده}$$

$$\boxed{c} \quad y^2 = 4px: \text{برپگهیی هاوتا}$$

11 جیاوازا چهقی بو برپگهیی زیاد $xy = 4$ بههژمیره.

12 ب فهرامۆشکرنا بارهییی ژلادانی برنی، بهاییی ژمارهیا راستی m بههژمیره. کو و هسا ل هاوکیشهیا $x^2 + mxy + my^2 - y - 1 = 0$ دکهت ببیته:

$$\boxed{a} \quad \text{برپگهیی نه تمام.}$$

$$\boxed{b} \quad \text{برپگهیی زیده.}$$

$$\boxed{c} \quad \text{برپگهیی هاوتا.}$$

13 جۆری وی چهماوهیی هاوکیشهیا $xy - x^2 - x - 1 = 0$ دنویئت چییه؟

\boxed{a} بو وینهکرنا چهماوهیی وی هاوکیشهیی، نه خشه یی ریزهیی بکارینه.

راهیانان

وانه

1-7

Various Forms of a Complex Number

شیوه یکن جودا بو ژمارهیا ئاویتته

1 فان ژماره یکن ل خوارئ ل سهر شیوه یکن جهبری بنقیسه.

$$(1-2i)^3 \quad \text{ا} \quad \frac{(2-i)(2+i)}{1+i} \quad \text{ب} \quad 1+i+i^2+i^3+\dots+i^{20} \quad \text{ج}$$

2 فان ژماره یکن ئاویتته ل خوارئ ل سهر شیوه یکن سیگوشه یی و جه مسهری بنقیسه

$$z_1 = -1+i\sqrt{3} \quad \text{ا} \quad z_2 = \sqrt{6}-i\sqrt{2} \quad \text{ب} \quad z_3 = \bar{z}_1 \times z_2^3 \quad \text{ج}$$

3 شیوه یکن جه مسهری بو ژمارهیا ئاویتته $z = 4e^{i\frac{\pi}{4}}$ نه قهیه

$$\text{ا} \quad \text{شیوه یکن جه مسهری بو ههرئیک ژ فان ژماره یکن ئاویتتهیا بنقیسه } z_1 = \frac{1}{\bar{z}^2} \text{ و } z_2 = z + iz$$

$$\text{ب} \quad \text{بهایئ ههرئیکئ ژ نه فان } |iz^2| \text{ و } \left| \frac{1+2i}{i\bar{z}} \right| \text{ بهه ژمئره.}$$

$$\text{ج} \quad \text{بهایئ ههرئیکئ ژ } \arg(-5z) \text{ و } \arg\left(\frac{-2i}{\bar{z}^5}\right) \text{ بهه ژمئره.}$$

$$\text{د} \quad \text{بهایئن ژمارهیا سرووشتی } n \text{ بهه ژمئره } z^n \text{ ژمارهیهکا راستی نهیا سالب نه بیت.}$$

4 شیوه یکن جه مسهری بو ژمارهیا ئاویتته $z = \sin(2\theta) - i\cos(2\theta)$ بنقیسه.

$$\text{ا} \quad \text{ل سهر شیوه یکن جهبری ژمارهیا ئاویتته } z^2 \text{ بنقیسه ههکه } z = (1+\sqrt{3}) + i(1-\sqrt{3})$$

$$\text{ب} \quad \text{بهایئ رووتئ ژمارهیا ئاویتته } z \text{ و گووشهیا جه مسهری بهه ژمئره.}$$

$$\text{ج} \quad \text{بههای ریک بو } \cos \frac{\pi}{12} \text{ و } \sin \frac{\pi}{12} \text{ بهه ژمئره.}$$

$$\text{6} \quad \text{بیسه لمینه کو } \left| \frac{iz+1}{\bar{z}+i} \right| = 1 \text{ ده می } z \neq i$$

$$\text{7} \quad M \text{ و } N \text{ و } P \text{ سی خالین جیاوازن } z_M = 2e^{i\theta}, z_N = \bar{z}_M, z_P = 2e^{3i\theta} \text{ بسه لمینه کو } MN = MP$$

8 شیوه یکن جه مسهری بو فان ژماره یکن ئاویتته بنقیسه

$$z = \left(\frac{i}{\sqrt{3}-i} \right)^{12} \quad \text{ا} \quad z = \left(1 - e^{i\frac{\pi}{3}} \right)^{20} \quad \text{ب}$$

$$\text{9} \quad \text{شیوه یکن جه مسهری بو قئ ژماره یکن } z = \left(\sin \frac{\theta}{2} + i\cos \frac{\theta}{2} \right)^{10} \text{ بنقیسه.}$$

$$\text{10} \quad \text{ا} \quad \text{ل سهر شیوه یکن جه مسهری، رهگئن 1 ل پلهیا 5 بنقیسه.}$$

$$\text{ب} \quad \text{سهرجه می نهوان رهگان چهنده؟}$$

$$\text{11} \quad \text{ل سهر شیوه یکن جهبری، ژمارهیا ئاویتته } z \text{ کو فان ههر دوو مهرجان ساخدکته بنقیسه: } |z-1| = \sqrt{5} \quad \arg(z) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$\text{12} \quad \text{بیسه لمینه کو } (1+i\sqrt{3})^n + (1-i\sqrt{3})^n = 2^{n+1} \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$$

ژ راهيئنانا 1 تا 4، ژمارهيا ئاويتته بو شيوه يي خالا m ب جهگوهوړكا دياركري بنقيسه.

1 $M(3, 4)$ ، پاكيشانا ئاراسته بړهكي $\vec{u}(-2, 1)$ 2 $M(1, 2 - \sqrt{3})$ ويئنه دانه وه ل دورى ته وهري x .

3 $M(\sqrt{2}, -1)$ ، ب هاورپژيه كا ئه ندازه ي چهي وي خالا بنهرت و پژهيا وي $\sqrt{2}$.

4 $M(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ، دهوردان ل دورخالا بنهرت ب گوشه يا $\frac{\pi}{6}$.

5 M خالا ژمارهيا ئاويتته (z) دهمي $z \neq \pm 1$ و $z \neq \pm i$. كوئمه لا خالين M بهه ژميړه دا هه ردو و راسته هيل PQ و PR ستوون بن، هه كه بزاني كو $z_P = 1$ ، $z_Q = z^2$ ، $z_R = z^4$.

6 A, B, P, D چار خالان ل سهر رووته ختي پوتاني، دهمي $z_A = 2$ ، $z_B = i$ ، $z_C = 3i$ ، $z_D = \frac{18}{5} + \frac{6}{5}i$.
 ا) بسه لمينه كو $\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_D}\right) = 2k\pi$ ده باره ي هه ردو و راسته هيلين AB و CD چ ده رنه نجام ده كي؟

ب) $|z_B - z_C|$ و $|z_A - z_D|$ بهه ژميړه.

ج) جوړي چوار لايي $ADCB$ چيه؟

7 بسه لمينه كو سيگوشه يا PQR سيگوشه يه كا ريكه، دهمي $z_P = -2$ ، $z_Q = 1 + i\sqrt{3}$ ، $z_R = 1 - i\sqrt{3}$.